Über die 6-Baum-Stichprobe von Prof. M. Prodan

Prof. Tasiti Suzuki

02.02.2012

In den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts war die Winkelzähl-Stichprobe in der Forstvermessung in Mode, die der Erfolg von Prof. W. Bitterlich angetrieben hatte. Dagegen habe ich seit langem widersprochen, weil diese trotz gegenteiliger Behauptung immer sehr große mathematische Varianz aufweist. Zum Beispiel ist die berühmte Methode von Buffon, um das π zu bestimmen, zwar theoretisch richtig, aber ihre Ermittlung benötigt eine sehr große Zahl von Tests. Um den Wert von π auf sechs Stellen hinter dem Komma zu bestimmen, sind 3.400 bis 5.000 Experimente erforderlich, wie von Lazzarini berichtet.

Später habe ich theoretisch und durch die Computersimulation gezeigt, dass die BITTERLICH-Methode eine viel größere Streuung als erwartet hat.

In jener Zeit hat unser Prof. M. Prodan auch eine Stichprobe – die 6-Baumstichprobe - veröffentlicht. Ich war der Auffassung, dass diese Methode auch eine große Streuung haben würde. Ich habe ihm diese Bedenken unmittelbar gesagt, und danach hat er die Forschung daran (original: *richtig und männlich*) aufgegeben. Ich trug allzu viele Bedenken, aber er war schon nicht mehr in der Welt. Wenn ich (original *im Gegenteil Fehler gemacht*) mich geirrt hätte, hätte ich mich nicht mehr entschuldigen können. Das war bis jetzt immer meine Sorge im Herzen.

Heute schreibt Herr A. Roeder mir, dass eine Denkfeier zur Erinnerung an Prof. Prodan im Oktober geplant wird, und dass er mir empfiehlt, dabei etwas zu schreiben. Sogleich suchte ich mein altes Heft und fand die Rechnung, wie folgt.

Es ist vielleicht unnötig, Ihnen die 6-Baum-Stichprobe zu erklären. Aber es passt mir besser, wenn ich die Zeichnungen, die Prodan verwendet hat, in der Erklärung benutzen kann.

Man wählt einen Punkt M im Wald zufällig aus. Von diesem Punkt M wird der 6. nächststehende Baum aufgesucht und der Abstand a_6 zu dem Baum gemessen und der Baum gekluppt. Auch die anderen 5 nächststehenden Bäume werden gekluppt. Diese Durchmesser werden mit $d_1, d_2, \ldots d_6$ bezeichnet. Für jede Baumgruppe wird ein Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r_6 beschrieben.

$$r_6 = a_6 + \tfrac{1}{2}d_6$$

Dann ist die Grundfläche je ha berechnet mit:

$$G/ha = (2500/r_6^2)\cdot (d_1^2 + d_2^2 + \ldots d_6^2)$$

Die Aufnahme muss vielfach wiederholt und der Durchschnitt ermittelt werden. Das ist in Kürze (original *der Umriss*) die 6-Baumstichprobe von Prof. Prodan.

Unterstellen wir einen Wald, in dem die Bäume ganz zufällig verteilt sind und nehmen wir an, dass diese Bäume durchschnittlich λ/m^2 stehen. Dann stehen in einem Kreis mit dem Radius r_6 (kurz als r bezeichnet) 6 Bäume. Genau gesagt ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kreis mit dem Radius r 5 Bäume enthält

$$(1/5!)\cdot (\pi r^2 \lambda)^5 \exp(-\pi r^2 \lambda)$$

Und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem engen Ring mit Radien r und r+dr der 6-te Baum steht

$$(2\pi r \lambda)dr$$

Multipliziert man die zwei Faktoren, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $P_6(r)dr$ dafür, dass der 6-te Baum in dem Umkreis steht:

$$P_6(r)dr = (1/5!)\cdot (\pi r^2 \lambda)^5 \exp(-\pi r^2 \lambda) \cdot (2\pi r \lambda)dr$$

Nach einigen elementaren Umformungen mit

$$\pi r^2 \lambda = t$$

erhält man

$$2\pi r\lambda dr = dt$$

und es ergibt sich die geänderte Wahrscheinlichkeit

$$P_6(r)dr = (1/5!)\cdot t^5 e^{-t}\,dt$$

Zwar scheint dieses eine Formel der Poisson-Verteilung zu sein. Allerdings sind hier die Variablen r oder t stetig und nicht, wie in der Poisson-Verteilung, diskrete Parameter.

Um die folgende Erklärung zu verstehen, muss man die Definition der Γ-Funktion und ihre Eigenschaften benutzen, wie

$$_0\int^{\infty} x^m\, e^{-m}\, dx \equiv \Gamma(m)$$

$$\Gamma(m) = (m-1)\Gamma(m-1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{wenn } n = \text{ganze Zahl}$$

$$\text{insbesondere gilt auch } \Gamma(½) = \sqrt{\pi}$$

Dass die Wahrscheinlichkeit $P_6(r)$ eine Verteilungsfunktion besitzt, kann man beweisen:

$$F(0)= 0$$

$$F(\infty) = {_0\int^{\infty}} P_6(r)dr = (1/5!)\cdot {_0\int^{\infty}} t^5 e^{-t}dt$$

$$= (1/5!)\cdot \Gamma(6) = 1$$

Daher ist der Durchschnitt E(r):

$$E(r) = {_0\int^{\infty}} rP_6(r)dt = {_0\int^{\infty}} (t^{½}\cdot t^5/5!\ \sqrt{\pi\lambda})e^{-t}dt$$

$$= (1/(5!\ \sqrt{\pi\,\lambda}))\ \Gamma(6+½) = (693/512)\cdot(1/\sqrt{\lambda})$$

Der Ansatz von Prodan ermittelt den Durchschnitt der Quadrate r^2:

$$E(r^2) = {_0\int^{\infty}} r^2 P_6(r)dr = 1/(5!\ \pi\,\lambda)\ {_0\int^{\infty}} t^6 e^{-t}dt$$

$$=(1/(5!\ \pi\,\lambda))\ \Gamma(\pi) = 6/\pi\,\lambda$$

Von daher bekommt man:

$$\lambda = 6/\ \pi E(r^2)$$

Von dieser Formel ausgehend kann man die Stammzahl N/ha abschätzen:

$$N = 10^4\,\lambda = (6\cdot 10^4)/\ \pi E(r^2)$$

Andererseits ist die durchschnittliche Grundfläche der Einzelbäume in der Stichprobe:

$$(\pi/4)\cdot\ (d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + ..+ d_6^{\,2})/6 \qquad m^2$$

Daher ist die gesamte Grundfläche G/ha

$$G/ha = (6\cdot 10^4/\ \pi E(r^2))\cdot\ \pi/4\ \cdot\ (d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + \ldots + d_6^{\,2})/6$$

$$= (2500/\ \boldsymbol{\pi} E(r^2))\cdot\ (d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + \ldots + d_6^{\,2})$$

Das stimmt mit der Formel von Prodan überein und belegt deren theoretisch richtige Ableitung.

Nun betrachten wir die Größe des Variationskoeffizienten. Zunächst erhält man

$$E(r^4) = {_0\int^{\infty}} r^4 P_6(r)dr = (1/5!(\ \pi\,\lambda)^2)\cdot {_0\int^{\infty}} t^2 e^{-t}dt$$

$$= 6\cdot\pi/(\pi\,\lambda)^2$$

Und daraus folgt:

$$\sigma^2(r^2) = E(r^4) - (E(r^2))^2 = 6/(\pi\,\lambda)^2$$

und für die Varianz ergibt sich

$$\sigma(r^2) = \sqrt{6}/\ \pi\,\lambda$$

Deswegen ist der Variationskoeffizient

$$\sigma(r^2)/E(r^2) = 1/\sqrt{6} = 0.408$$

Daraus erklärt sich, dass der Variationskoeffizient unabhängig von λ ist, und dass er sehr groß ist. Das heißt, dass das Prodan-Verfahren theoretisch richtig ist, aber dass es in der Praxis problematisch ist; das Verfahren ist eine Art von Monte Carlo Methode, die nur im Computer nutzbar ist, aber nicht in der Anwendung im Freien.

Literatur

1. Prodan, M. (1962): 6-Baum-Stichprobe für die Forsteinrichtung. In: Allg. Forst- und Jagdzeitung, 140. Jg.
2. Prodan, M. (1973): Spatiale Variation und Punktstichproben. In: Allg. Forst- und Jagdzeitung, 144. Jg., 229-236
3. Prodan, M. (1968): Einzelbaum, Stichprobe und Versuchsfläche. In: Allg. Forst- und Jagdzeitung, 139. Jg., H. 11, 239-248
4. Prodan, M. (1968): Punktstichprobe für die Forsteinrichtung. In: Der Forst- und Holzwirt, 23. Jg., H. 11, 225-226